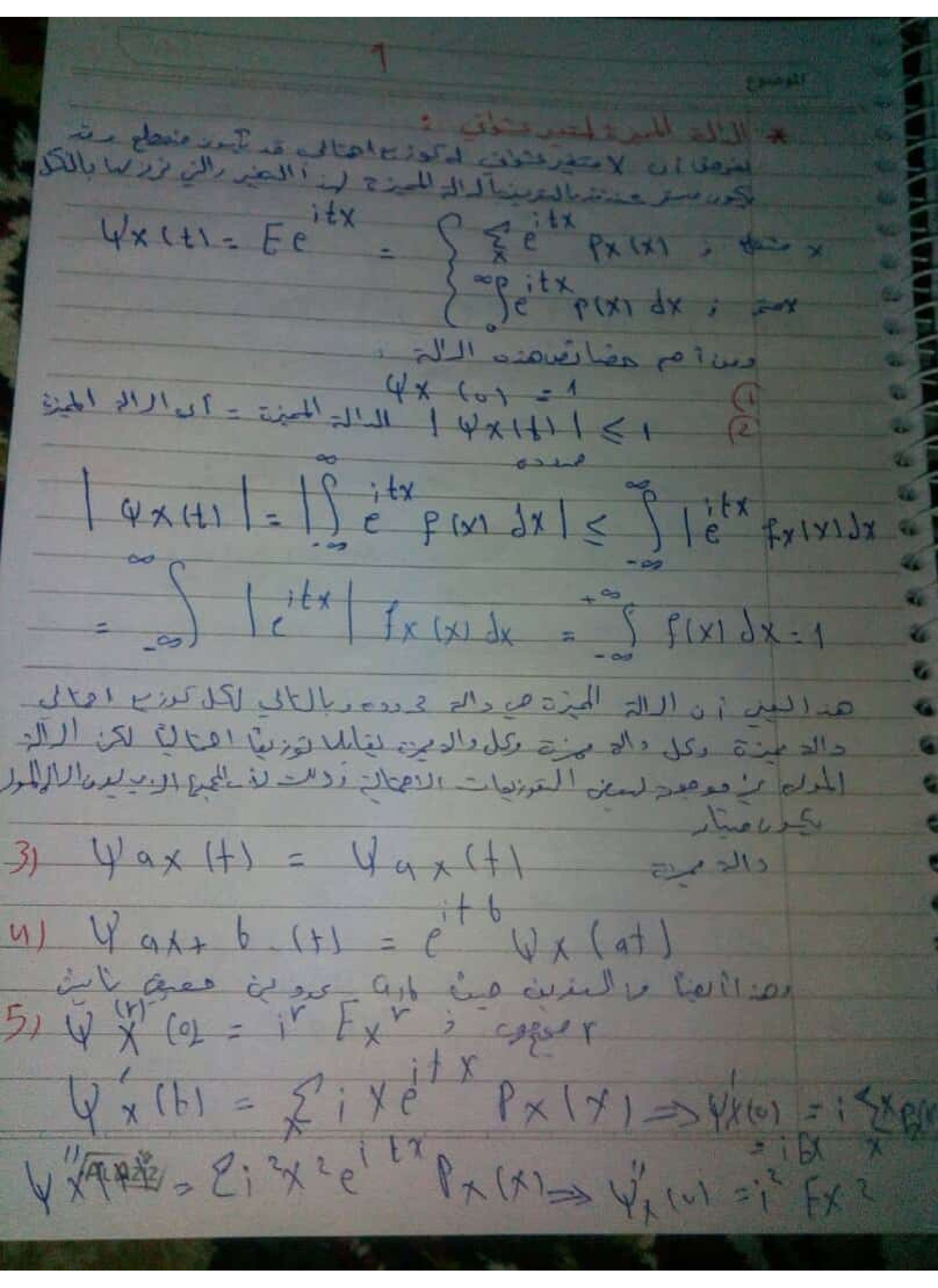


الموضوع

* الدالة المميزة لمتغير عشوائي :

نفرض أن X متغير عشوائي له توزيع احتمالي قد يكون منفصل أو متصل يكون مستمر فنعرف الدالة المميزة لهذا المتغير والتي نرمز لها بالشكل

$$\varphi_X(t) = E e^{itX} = \begin{cases} \sum_x e^{itx} P_X(x) \; ; & x \text{ متقطع} \\ \int_0^{\infty} e^{itx} f(x)\, dx \; ; & x \text{ مستمر} \end{cases}$$

ومن أهم خصائص هذه الدالة :

1) $\varphi_X(0) = 1$

2) $|\varphi_X(t)| \le 1$ الدالة المميزة = أي الدالة المميزة محدودة

$$|\varphi_X(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\, dx \right| \le \int_{-\infty}^{\infty} |e^{itx}| f_X(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |e^{itx}| f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$$

هذا يعني أن الدالة المميزة هي دالة محدودة وبالتالي لكل توزيع احتمالي دالة مميزة وكل دالة مميزة يقابلها توزيعا احتماليا لكن الدالة المولدة قد لا توجد لبعض التوزيعات الاحتمالية وذلك لأن المجموع أو التكامل للدالة المولدة يكون لا نهائي

3) $\varphi_{ax}(t) = \varphi_{a x}(t)$ دالة مميزة

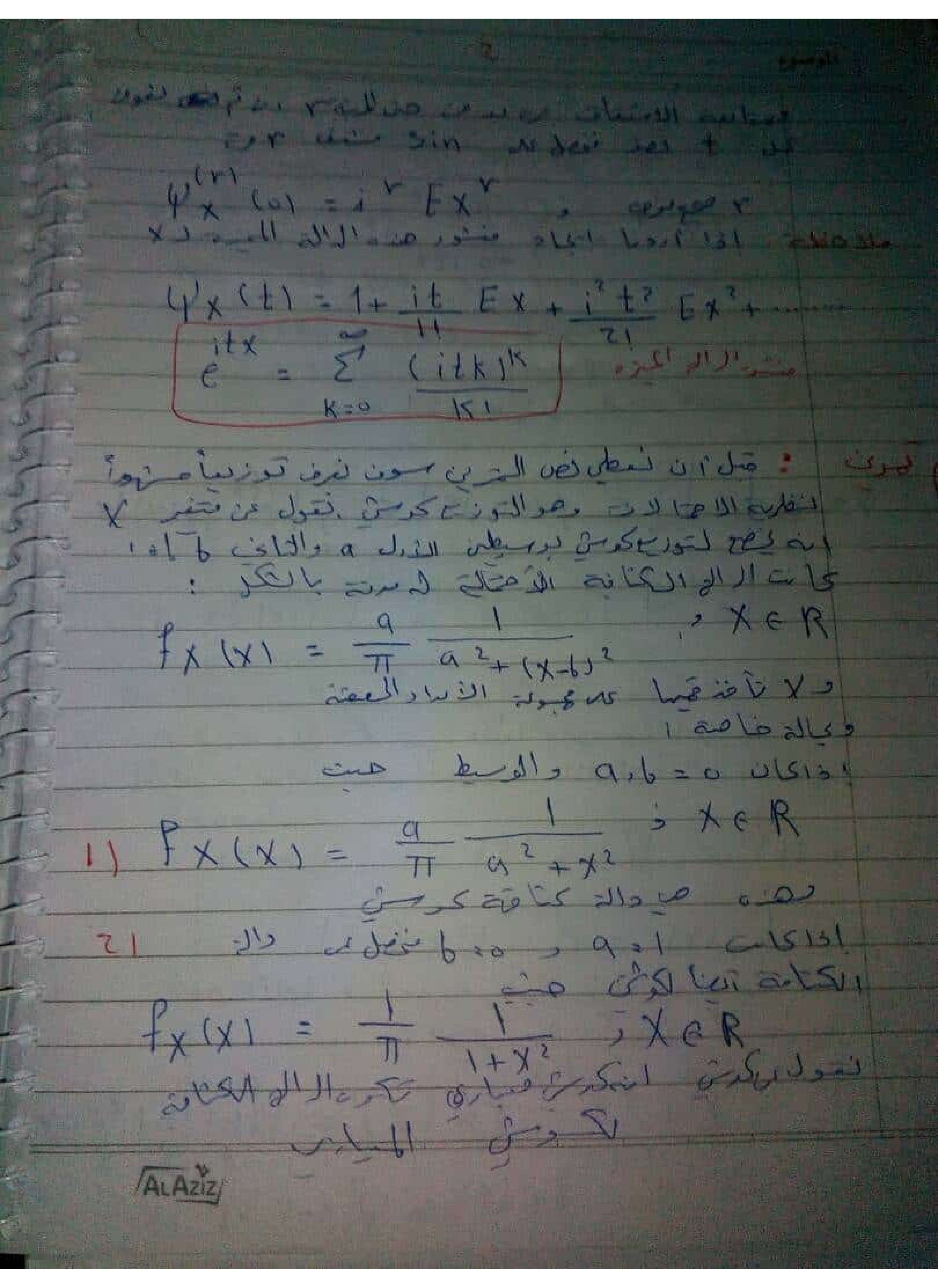
4) $\varphi_{ax+b}(t) = e^{itb} \varphi_X(at)$

وهذا أنها ... حيث a, b عددين حقيقيين ثابتين

5) $\varphi_X^{(r)}(0) = i^r E X^r$; r صحيح

$$\varphi'_X(t) = \sum_x i x e^{itx} P_X(x) \Rightarrow \varphi'_X(0) = i \sum_x x P_X(x) = iEX$$

$$\varphi''_X(t) = \sum i^2 x^2 e^{itx} P_X(x) \Rightarrow \varphi''_X(0) = i^2 E X^2$$



فعالية الاشتقاق ... صالحة ٣ مرات ثم نعوض
عن t بصفر فنحصل على sin مشتقة ٣ مرة

$$\varphi_X^{(3)}(0) = i^3 E X^3$$ ٣ صحيحة .

ملاحظة: اذا أردنا ايجاد منشور مكلورين الدالة المميزة لـ X

$$\varphi_X(t) = 1 + \frac{it}{1!} E X + \frac{i^2 t^2}{2!} E X^2 + \dots$$

$$e^{itx} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(itx)^k}{k!}$$ منشور الدالة الأسية

تعريف: قبل أن نعطي نص المبرهنة سوف نعرف توزيعاً مشهوراً لنظرية الاحتمالات وهو التوزيع كوشي. نقول عن متغير X إنه يخضع لتوزيع كوشي بوسيطين الأول a والثاني b إذا كانت الدالة الكثافة الاحتمالية له معرفة بالشكل:

$$f_X(x) = \frac{a}{\pi} \frac{1}{a^2 + (x-b)^2} \quad , \; x \in R$$

و X تأخذ قيماً من مجموعة الأعداد الحقيقية
وبصورة خاصة:
إذا كان $a, b = 0$ والوسيط حيث

1) $$f_X(x) = \frac{a}{\pi} \frac{1}{a^2 + x^2} \quad ; \; x \in R$$

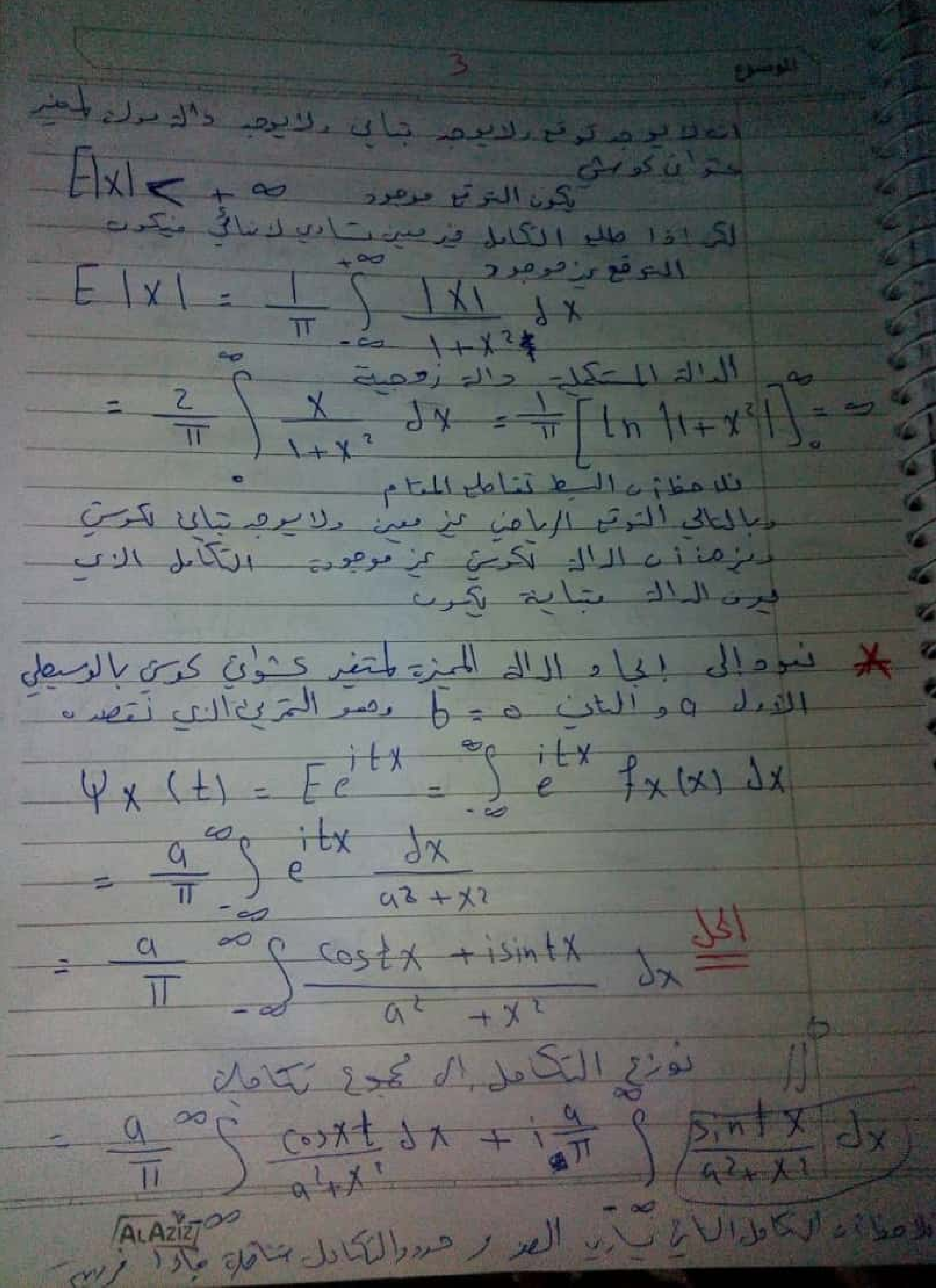
وهذه هي دالة كثافة كوشي

2) إذا كانت $a = 1$ و $b = 0$ فنحصل على دالة الكثافة التالية حيث

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + x^2} \quad ; \; X \in R$$

نقول لهذه الصيغة عبارة عن الدالة الكثافة لكوشي القياسي

AL Aziz



اذا لا يوجد توقع ولا يوجد تباين ولا يوجد دالة مولدة للعزوم لمتغير عشوائي كوشي

$E|X| < +\infty$ يكون التوقع موجود

لكن اذا طلع التكامل غير منتهي تباعدي لانهائي فيكون التوقع غير موجود

$$E|X| = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|X|}{1+x^2} \, dx$$

الدالة المتكاملة دالة زوجية

$$= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\ln |1+x^2| \right]_0^{\infty} = \infty$$

نلاحظ ان الشرط تقاطع المتمام

وبالتالي التوقع الرياضي غير معين ولا يوجد تباين لكوشي

ونلاحظ ان الدالة لكوشي غير موجودة التكامل الذي

يعين الدالة متباينة تكون

* نعود الى ايجاد الدالة المميزة لمتغير عشوائي كوشي بالوسيطين الاول a والثاني $b = 0$ وهو التمرين الذي نقصده .

$$\varphi_X(t) = E e^{itx} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x) \, dx$$

$$= \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{dx}{a^2+x^2}$$

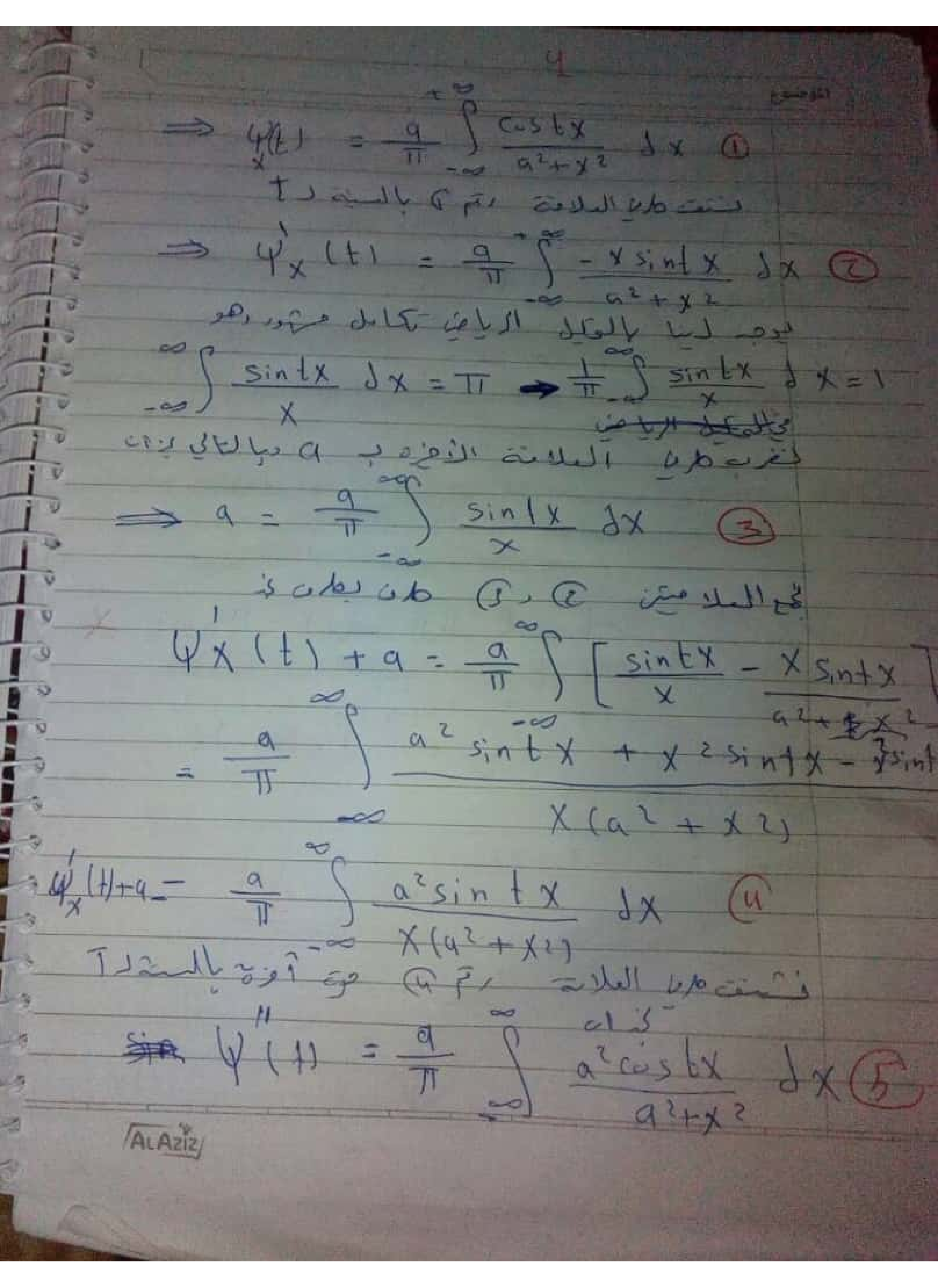
$$= \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos tx + i \sin tx}{a^2+x^2} \, dx$$ الحل

نوزع التكامل الى مجموع تكاملين

$$= \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos xt}{a^2+x^2} \, dx + i \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin tx}{a^2+x^2} \, dx$$

نلاحظ ان التكامل الثاني يساوي الصفر ، حدود التكامل متناظرة حول الصفر

ALAZIZ



$$\Longrightarrow \psi_x(t) = \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos tx}{a^2+x^2}\,dx \quad (1)$$

نشتق طرفي العلاقة رقم 1 بالنسبة لـ t

$$\Longrightarrow \psi'_x(t) = \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-x\sin tx}{a^2+x^2}\,dx \quad (2)$$

يوجد لدينا بالتحليل الرياضي تكامل مشهور وهو

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin tx}{x}\,dx = \pi \rightarrow \frac{1}{\pi}\int_{-\infty} \frac{\sin tx}{x}\,dx = 1$$

~~في التحليل الرياضي~~

نضرب طرفي العلاقة الأخيرة بـ a وبالتالي يكون

$$\Longrightarrow a = \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin tx}{x}\,dx \quad (3)$$

نجمع العلاقتين 2 و 3 طرفاً لطرف

$$\psi'_x(t) + a = \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\sin tx}{x} - \frac{x\sin tx}{a^2+x^2}\right]$$

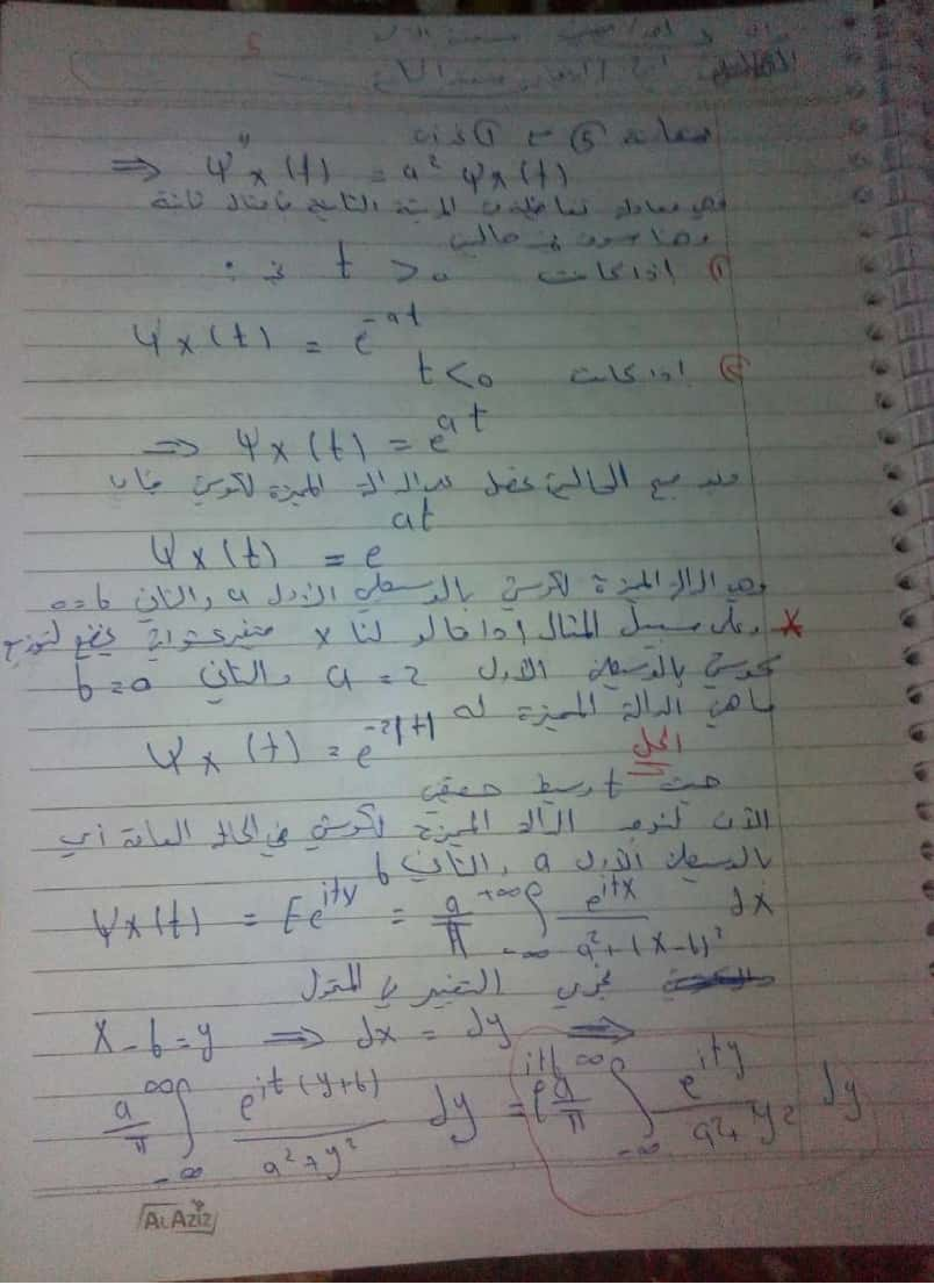
$$= \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2\sin tx + x^2\sin tx - x^2\sin tx}{x(a^2+x^2)}$$

$$\psi'_x(t)+a = \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2\sin tx}{x(a^2+x^2)}\,dx \quad (4)$$

نشتق طرفي العلاقة رقم 4 مرة أخرى بالنسبة لـ t

كما

$$\psi''(t) = \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2\cos tx}{a^2+x^2}\,dx \quad (5)$$



معادلة (5) مع (1) إذن

$$\Rightarrow \varphi''_x(t) = a^2 \varphi_x(t)$$

هي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية بأمثال ثابتة وحلها يعطى في حالتين

(1) إذا كانت $t > 0$ فإن:

$$\varphi_x(t) = e^{-at}$$

(2) إذا كانت $t < 0$

$$\Rightarrow \varphi_x(t) = e^{at}$$

وبدمج الحالتين نحصل على الدالة المميزة لكوشي بأنها

$$\varphi_x(t) = e^{at}$$

وهي الدالة المميزة لكوشي بالوسيط الأول a والثاني $b = 0$

* وعلى سبيل المثال إذا قال لنا x متغير عشوائي يخضع لتوزيع كوشي بالوسيط الأول $a = 2$ والثاني $b = 0$ ما هي الدالة المميزة له

$$\varphi_x(t) = e^{-2|t|}$$

الحل

حيث t وسيط حقيقي

الآن لنوجد الدالة المميزة لكوشي في الحالة العامة أي بالوسيط الأول a، الثاني b

$$\varphi_x(t) = Ee^{ity} = \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{a^2 + (x-b)^2}\, dx$$

نجري التغيير في المتحول

$$x - b = y \Rightarrow dx = dy \Rightarrow$$

$$\frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it(y+b)}}{a^2 + y^2}\, dy = e^{itb}\frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ity}}{a^2 + y^2}\, dy$$

Al Aziz

هي : دالة المميزة لكوشي بوسيط الأول a والثاني b

$$= e^{itb} \cdot e^{-a|t|} = e^{itb - a|t|}$$

وهي الدالة المميزة لكوشي في الحالة العامة

ملاحظة ١ : الدالة المميزة لكوشي المعياري تعطى بالشكل

$$\varphi_X(t) = e^{-|t|} \; ; \; t \in R$$

ملاحظة

لنوجد الدالة التوزيعية لكوشي في الحالة التي يكون فيها الوسيط الأول a والوسيط الثاني صفر .

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{x} \frac{dt}{a^2+t^2} =$$

$$= \frac{a}{\pi}\left[\frac{1}{a}\arctan g\frac{t}{a}\right]_{-\infty}^{x}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\arctan g\frac{x}{a} + \frac{\pi}{2}\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan\frac{x}{a} \; ; \; x \in R$$

ملاحظة : إذا قالوا لنا لنفرض أن X متغير كوشي له دالة مميزة

$$\varphi_X(t) = e^{-3|t|} \; ; \; t \in R$$

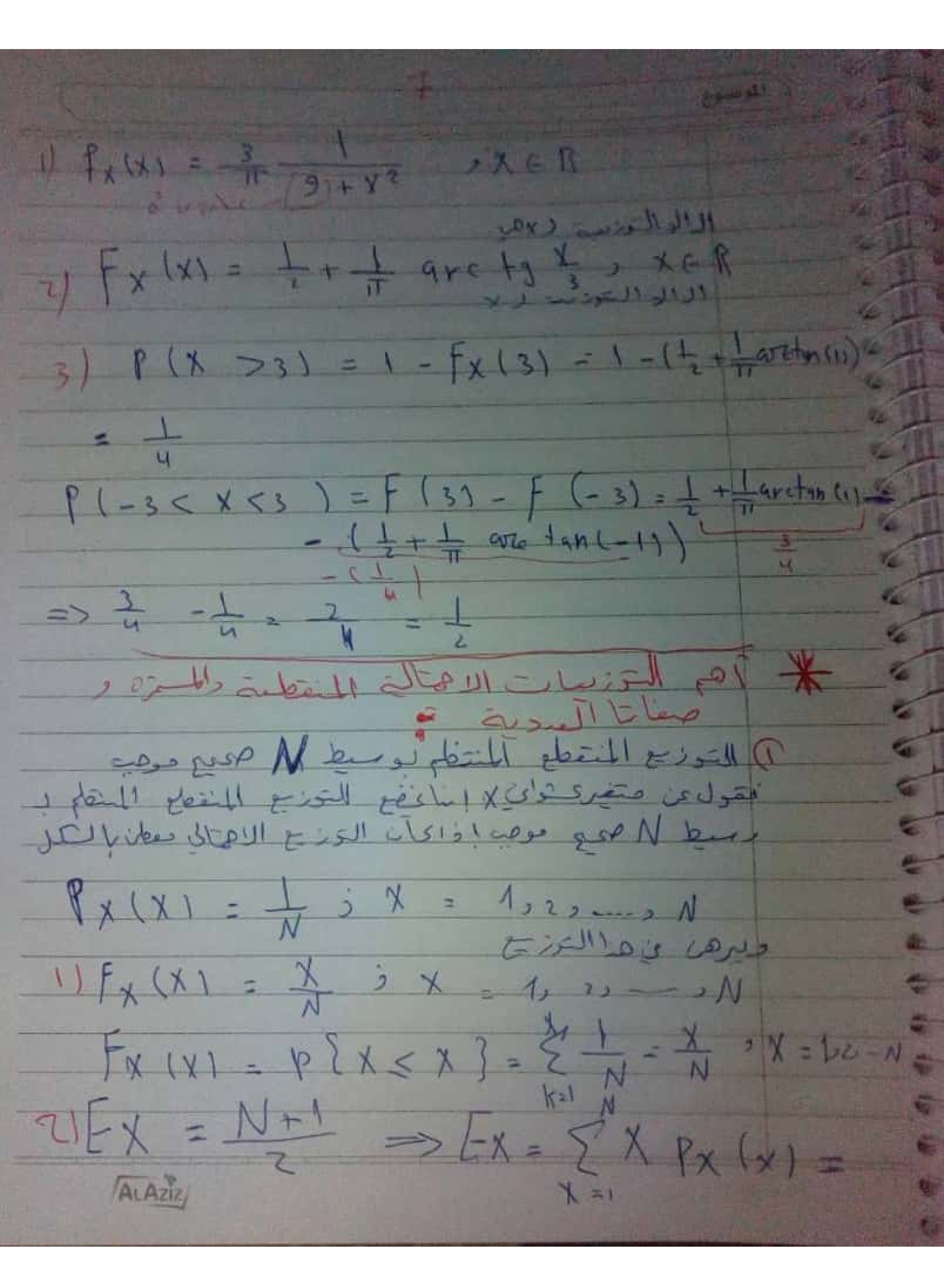
عندئذ المطلوب : ① عين دالة الكثافة للمتغير X

② عين دالة التوزيعية لـ X ③ احسب احتمال X>3 و احتمال -3<X<3

$$P(-3 < X < 3) \qquad P(X > 3)$$

الحل

نلاحظ أن دالة الكثافة المعطاة هي دالة كثافة لكوشي بوسيط الأول a = 3 والثاني صفر حيث نجد دالة الكثافة له



7

1) $f_X(x) = \frac{3}{\pi} \frac{1}{9 + x^2} , x \in \mathbb{R}$

الدالة الكثافة ل X هي

2) $F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \frac{x}{3} , x \in \mathbb{R}$

الدالة التوزيع ل X

3) $P(X > 3) = 1 - F_X(3) = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(1)\right)$

$= \frac{1}{4}$

$P(-3 < X < 3) = F(3) - F(-3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(1) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(-1)\right)$

$\frac{3}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)$

$\Rightarrow \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

* أهم التوزيعات الاحتمالية المتقطعة والمستمرة و صفاتها العددية :

① التوزيع المتقطع المنتظم بوسيط N صحيح موجب

نقول عن متغير عشوائي X إنه يخضع التوزيع المتقطع المنتظم بـ وسيط N صحيح موجب إذا كان التوزيع الاحتمالي معطى بالشكل

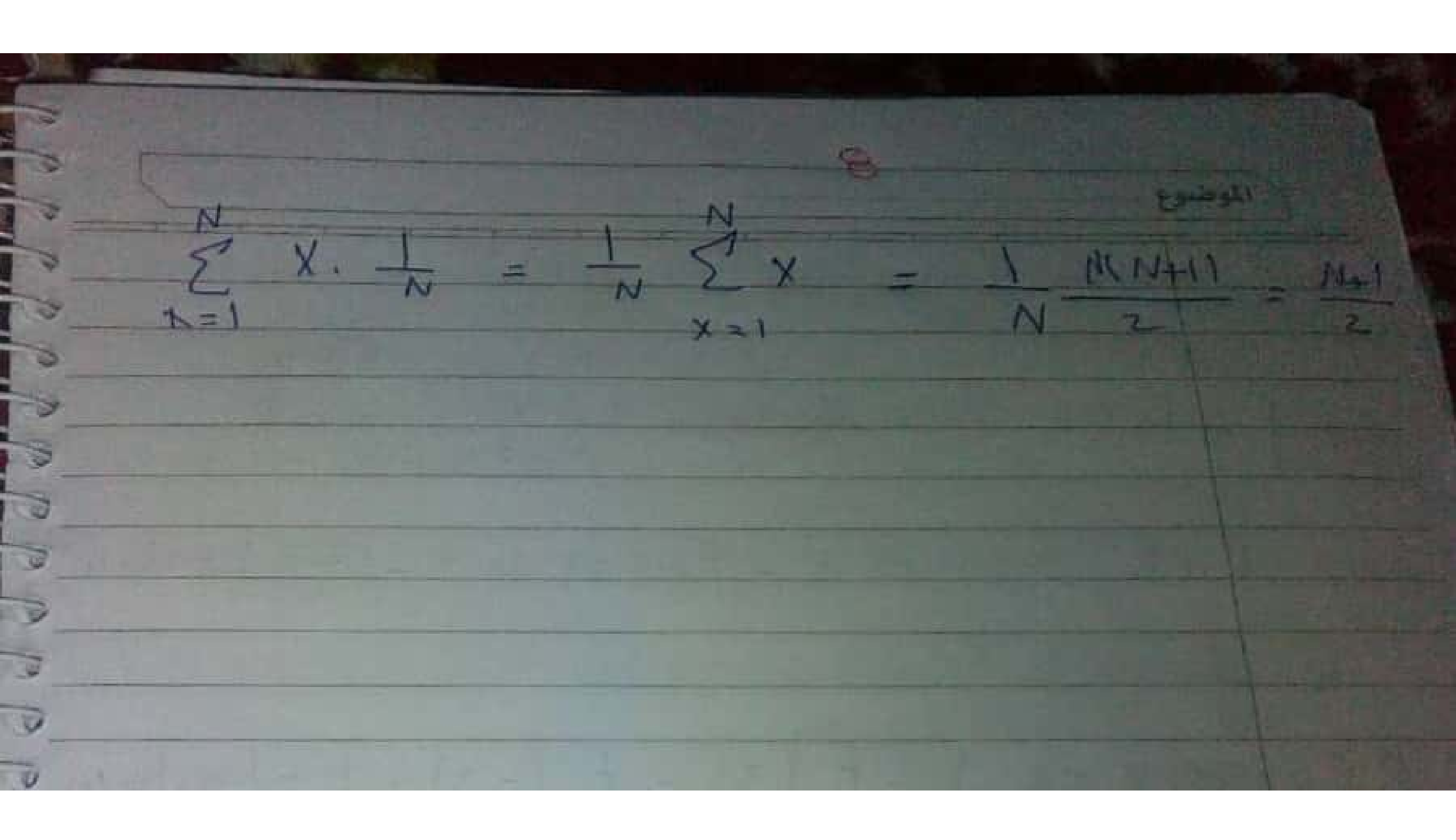
$P_X(x) = \frac{1}{N} ; x = 1, 2, \dots, N$

ونبرهن في هذا التوزيع

1) $F_X(x) = \frac{x}{N} ; x = 1, 2, \dots, N$

$F_X(x) = P\{X \le x\} = \sum_{k=1}^{x} \frac{1}{N} = \frac{x}{N} ; x = 1, 2, \dots, N$

2) $E X = \frac{N+1}{2} \Rightarrow E X = \sum_{x=1}^{N} x \, P_X(x) =$


الموضوع
$\sum_{x=1}^{N} x \cdot \frac{1}{N} = \frac{1}{N} \sum_{x=1}^{N} x = \frac{1}{N} \frac{N(N+1)}{2} = \frac{N+1}{2}$